$$\frac{x}{(x^2+x+1)^{3/2}}=\frac{1}{2\cos\theta}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\cos^2\theta$$

これで積分する関数の計算ができた．つぎに

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\cdot d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

最後に，積分の範囲について調べる．

$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ で，$x=0$ とおくと

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta,\quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$x=1$ とおくと

$$\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta,\quad \tan\theta=\sqrt{3}\qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

x が 0 から 1 まで増加するにともなって，θ は $\pi/6$ から $\pi/3$ まで変化する．そこで，

$$\int_0^1\frac{xdx}{(x^2+x+1)^{3/2}}$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\cos^2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\Big[-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{3}$$

2. 面積・体積の計算

例題 5. （1） 曲線 $y=x\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ ① の原点Oを通る接線の方程式を求めよ．
（2） （1）において，第4象限にある接点をPとするとき，線分 OP と①とで囲む図形の面積を求めよ

原点を通る直線を $y=mx$ とし，①とから重根（？）の条件を考えるのは数 I 的発想．

一般な点における接線の方程式を作り，原点を通るための条件によって接点をみつける．

解 （1） $y=x\sin x$ について

$$y'=\sin x+x\cos x$$

曲線①上の $x=\alpha$ の点における接線の方程式は

$$y-\alpha\sin\alpha=(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)(x-\alpha)$$

原点を通るためには

$$-\alpha\sin\alpha=(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)(-\alpha)\qquad \therefore\quad \alpha^2\cos\alpha=0$$

よって　$\alpha=0$，$\alpha=\pi/2$ または $\alpha=3\pi/2$

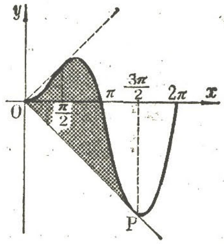
したがって，求める接線は

$$\boldsymbol{y=0,\ y=x,\ y=-x}\ \cdots\cdots\text{（こたえ）}$$

（2） （1）の3接線のうち第4象限を通るのは

$$y=-x$$

接点Pは $\left(\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2}\right)$



線分 OP と曲線①の囲む部分の面積は

$$\int_0^{3\pi/2}\{x\sin x-(-x)\}dx$$

$$=\int_0^{3\pi/2}\{x(-\cos x)'+x\}dx$$

$$=\left[-x\cos x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{3\pi/2}+\int_0^{3\pi/2}\cos x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2+\Big[\sin x\Big]_0^{3\pi/2}=\frac{9\pi^2}{8}-1\ \cdots\text{（こたえ）}$$

例題 6. （1） 曲線 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{7\pi}{6}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．
（2） この部分が x 軸のまわりを1回転してできる立体の体積を求めよ．

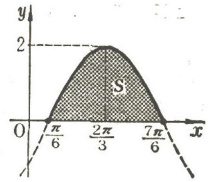
（1） 曲線 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ が x 軸とどこで交わるかをまず調べる．$y=0$ から

$$\tan x=1/\sqrt{3}\qquad \therefore\quad x=\pi/6,\ 7\pi/6$$

しかも，$\pi/6\leqq x\leqq 7\pi/6$ で $y\geqq 0$．したがって曲線と x 軸の囲む部分の面積を S とすれば

$$S=\int_{\pi/6}^{7\pi/6}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Big[-\sqrt{3}\cos x-\sin x\Big]_{\pi/6}^{7\pi/6}$$



こうしてもよいが，

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin(x-\pi/6)$$

と書きなおし，

$$S=\int_{\pi/6}^{7\pi/6}2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$=2\left[-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\pi/6}^{7\pi/6}=2\cdot2=4\quad\text{（こたえ）}$$

とするほうが簡単である．

（2） （1）の曲線と x 軸の囲む部分が，x 軸のまわりを1回転してできる立体の体積を V とすれば，

$$V=\int_{\pi/6}^{7\pi/6}\pi y^2dx$$

ここでも $y=2\sin(x-\pi/6)$ を使うと計算が楽で，

$$V=\pi\int_{\pi/6}^{7\pi/6}4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$=2\pi\int_{\pi/6}^{7\pi/6}\left\{1-\cos2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}dx$$

$$=2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\pi/6}^{7\pi/6}=2\pi\cdot\pi=\boldsymbol{2\pi^2}$$

$\sqrt{3}\sin x-\cos x$ をまとめなかったら，計算は大変で